学科与专题介绍

# 双曲性与代数微分方程

Damian Brotbek Erwan Rousseau

**摘要** 在 Bloch (布洛赫), Cartan (嘉当), Green-Griffiths (格林–格里菲思) 和萧荫堂 (Yum-Tong Siu) 等人工作的基础上, Jean-Pierre Demailly 引入了一种节空间 (espaces de jets) 的构造, 用于研究复流形在 Kobayashi (小林昭七) 意义下的双曲性性质. 我们在本文中描述了这套理论对 Kobayashi 猜想和 Green-Griffiths-Lang (兰) 猜想的重大贡献.

## 1. 双曲性

在复几何中, Kobayashi 意义下的双曲性 (hyperbolicité) 问题源自经典复分析的若干基本结果. 首先回顾著名的 Liouville (刘维尔) 定理, 这是 Cauchy (柯西) 公式的一个直接推论: 任意有界整函数必为常数. 该结果的一个重要推广是 Picard (皮卡) 小定理: 任意非常数整函数至多只能省略一个值. Liouville (或 Picard) 定理可以重新表述为: 任意全纯映射 $f\colon \mathbb{C} \to \Delta$ (或 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$) 必为常值映射 (其中 $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ 表示单位圆盘). 这种表述启发我们为任意复流形 $X$ 定义双曲性: 若任意全纯映射 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 均为常值映射, 则称 $X$ 是双曲的. 此时称 $X$ 是 Brody (布罗迪) 意义下的双曲流形. S. Kobayashi [31] 进一步提出了更强的概念: 他在任意复流形 $X$ 上定义了一种伪距离 $d_X$, 称为 Kobayashi 伪距离, 它推广了单位圆盘 $\Delta$ 上的 Poincaré (庞加莱) 距离 $\rho$: $d_X$ 是 $X$ 上的最大伪距离, 使得对于任意全纯映射 $f\colon (\Delta, \rho) \to (X, d_X)$, 都有单调性性质 $f^* d_X \leqslant \rho$. 该定义受到著名的 Schwarz (施瓦茨) 引理的启发: 对任意全纯映射 $f\colon \Delta \to \Delta$, 有 $f^*\rho \leqslant \rho$. 因此特别地, $d_\Delta = \rho$, 而 $d_{\mathbb{C}} \equiv 0$; 此外, 对于任意全纯映射 $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, 均有 $f^* d_Y \leqslant d_X$.

**定义 1** 若 Kobayashi 伪距离 $d_X$ 实际上是距离 (即非退化) , 则称 $X$ 是 Kobayashi 意义下的双曲流形.

因此, 双曲流形 $X$ 上的任意全纯映射 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 都必为常值映射. 这一定义与 André Bloch [2] 提出的原理一致: 关于整曲线 (courbes entières) $f\colon \mathbb{C} \to X$ 的任何性质都应来自单位圆盘映射 $f\colon \Delta \to X$ 的分析结果. Brody 定理 [4] 证明了当 $X$ 为紧复流形时, (Brody 和 Kobayashi) 双曲性是等价的. 这一刻画使我们能得到许多双曲流形的例子, 例如: 亏格 $\geqslant 2$ 的紧 Riemann (黎曼) 曲面的直积、由无挠的格作用在有界对称域的紧商、以及余切丛丰富 (ample) 的射影流形 [1]. 最后一种情形凸显了双曲性与微分形式丛正性之间的深刻联系, 并使我们能够说明双曲流形的一些显著性质, 例如下面这个具有代数性质的命题所展

译自: Gaz. Math., Avril 2025, p. 62–76, Hyperbolicité et équations différentielles algébriques, Damian Brotbek et Erwan Rousseau. 

Damian Brotbek 是法国洛林大学教授.
Erwan Rousseau 是法国西布列塔尼大学教授, 他的邮箱地址是 erwan.rousseau@univ-brest.fr.

1) 本文中的射影流形都是复射影流形. —— 译注

示的那样 (参见 [34, 定理 6.3.26]).

**命题 1** *设 $X$ 为射影流形, 其余切丛是丰富的; $L \to X$ 为丰富线丛. 则存在常数 $\alpha > 0$, 使得对任意光滑射影曲线 $C$ 及非常值态射 $f\colon C \to X$, 均有*

$$\deg f^*L \leqslant \alpha \cdot (2g(C) - 2),$$

*其中 $g(C)$ 表示 $C$ 的亏格.*

我们解释一下此命题的证明, 它展示了接下来几节中的节微分理论在一阶情形下的基本思想. 态射 $f\colon C \to X$ 诱导出一个提升映射 $f_{[1]}\colon C \to \mathbb{P}(T_X)$, 其局部形式为 $f_{[1]}(t) = (f(t), [f'(t)])$, 其中 $\pi\colon \mathbb{P}(T_X) \to X$ 是切丛的射影化 1):

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(T_X) \arrow[d, "\pi"] \\ C \arrow[ur, "f_{[1]}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

余切丛的丰富性等价于射影化后伴随的重言 (tautologique) 线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(1)$ 的丰富性, 因此存在某个整数 $m > 0$, 使得 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(m) \otimes \pi^*L^{-1}$ 也是丰富的. 态射 $f$ 的微分诱导出 $f'\colon T_C \to f_{[1]}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(-1)$, 由此得到

$$\deg(f_{[1]}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(T_X)}(-1) \otimes \Omega_C^1) \geqslant 0.$$

因此推出 $\deg f^*L \leqslant m(2g(C) - 2)$.

Demailly [14] 证明了双曲射影流形同样满足类似的代数性质, 并提出了如下定义:

**定义 2** 设 $X$ 为射影流形. 若存在丰富线丛 $L$ 及常数 $\alpha > 0$, 使得对任意光滑射影曲线 $C$ 与非常值态射 $f\colon C \to X$, 均有

$$\deg f^*L \leqslant \alpha \cdot (2g(C) - 2),$$

则称 $X$ 是*代数双曲的*.

Demailly 进一步猜想逆命题也成立.

**猜想 1** (Demailly) 射影流形是双曲的, 当且仅当它是代数双曲的.

余切丛的丰富性并非双曲性的必要条件 (例如亏格 $\geqslant 2$ 的曲线直积) , 但余切丛丰富的流形具有另一显著性质 ([34, 例 6.3.28]) : 其任意子簇 (包括其自身) 均为一般型 (type général). Lang 猜想这种性质正好刻画了双曲流形:

**猜想 2** (Lang) 射影流形是双曲的, 当且仅当它的每一个正维数的闭子簇 (包括自身) 都是一般型的.

双曲性理论的一个重要魅力在于它与 Diophantus (丢番图) 几何的深刻联系, 这一联系由 Lang [32] 和 Vojta [47] 揭示. Lang 特别猜想: 定义在数域上的射影流形 $X$ 是双曲的, 当且仅当它在任意数域上仅有有限个有理点. 这推广了著名的 Mordell (莫德尔) 猜想, 而后者在曲线情形已由 Faltings (法尔廷斯) [27] 证明. 更一般地, Green-Griffiths 和 Lang 猜想一般型流形满足某种解析、代数与算术意义下的伪双曲性, 其核心思想总结为以下几条重要猜想, 这些猜想构成了整个领域研究的方向.

**猜想 3** (Green-Griffiths-Lang)

1) 以下交换图表中的 $f_{[1]}$ 原文为 $f'$. —— 译注

1. 一个复射影流形 $X$ 是一般型的, 当且仅当存在一个真代数子簇 $Z \subsetneq X$, 使得所有整曲线 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 的像都包含于 $Z$ 中.
2. 一个复射影流形 $X$ 是一般型的, 当且仅当存在一个丰富线丛 $L \to X$, 常数 $\alpha > 0$ 和真代数子簇 $Z \subsetneq X$, 使得对任意光滑射影曲线 $C$ 与非常值态射 $f\colon C \to X$, 若 $f(C) \not\subset Z$, 则有
$$\deg f^*L \leqslant \alpha \cdot (2g(C) - 2).$$
3. 一个定义在数域 $K$ 上的射影簇 $X$ 是一般型的, 当且仅当存在真代数子簇 $Z \subsetneq X$, 使得对于任意有限扩张 $K \subset K'$, 集合 $(X \setminus Z)(K')$ 是有限的.

射影空间中的超曲面情形自 Kobayashi [30] 提出以下猜想以来, 已成为双曲性研究的中心问题:

**猜想 4** (Kobayashi) 对每个 $n \geqslant 1$, 存在整数 $d_K(n)$, 使得 $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ 中次数 $d \geqslant d_K(n)$ 的一般 (générique) 超曲面是双曲的.

在接下来的章节中, 我们将介绍 Jean-Pierre Demailly 在复几何双曲性研究中的主要贡献, 特别是他对 Kobayashi 和 Green-Griffiths-Lang 猜想的推动. 他的成果及对这些问题的热情无疑启发了该领域的众多后续研究.

## 2. 节微分

### 2.1 节微分方程 (équations différentielles de jets)

研究复射影簇中整曲线的最有力工具之一是节微分理论. 这套理论可追溯至 Bloch 和 Cartan 的工作, 并在 20 世纪被众多数学家发展与应用; Jean-Pierre Demailly 的奠基性文章 [14] 极大地推广了该理论, 并很快成为主要参考文献.

该理论的核心想法是: 在满足适当假设的射影簇 $X$ 上, 可以构造更高阶的代数约束, 即代数型的微分方程, 使得在 $X$ 上的所有整曲线都必须满足这些方程. 本节我们将对这一方法作一简要概述, 并介绍其中的一些基本思想. 读者想系统性了解可参见 [14, 18].

2.1.1 节空间和节微分 现在固定一个维数为 $n$ 的光滑复流形 $X$. 对于一个整数 $k \geqslant 0$, 考虑 $X$ 的 $k$ 节空间, 定义为
$$J_kX = \{\gamma\colon U \to X \text{ 全纯}, U \subset \mathbb{C} \text{ 是开集且包含 } 0\}/\sim_k,$$
其中 $\sim_k$ 是如下的等价关系: 若两个芽 (germes) $\gamma_1, \gamma_2$ 在 $0$ 处的前 $k$ 阶导数相同 (这可在任意局部坐标中验证) , 则认为 $\gamma_1 \sim_k \gamma_2$. 我们记 $j_k\gamma$ 为 $\gamma$ 关于关系 $\sim_k$ 的等价类. 该节空间是一个维数为 $n + kn$ 的复流形, 并带有一个到 $X$ 的全纯映射 $p_k\colon J_kX \to X$, 其在 $X$ 上是一个 $\mathbb{C}^{nk}$ 全纯纤维丛. 为说明这一点, 只需取 $X$ 上的局部坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$, 它诱导出 $(z_1, \ldots, z_n, dz_1, \ldots, dz_n, \ldots, d^kz_1, \ldots, d^kz_n)$ 这样的坐标, 其中
$$d^pz_j(\gamma) = \gamma_j^{(p)}(0) \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant n, \ \forall 1 \leqslant p \leqslant k,$$
并且在坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$ 中写作 $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. 因此, 该节空间包含了 $k$ 阶的 Taylor (泰勒) 展开信息. 给定一个映射 $f\colon \mathbb{C} \to X$, 通过考察 $f$ 在各点的前 $k$ 阶导数, 可以将其提升为一个映射 $j_kf\colon \mathbb{C} \to J_kX$.

一个 $k$ 阶节微分方程 (或简称 $k$ 阶节微分) 就是 $J_kX$ 上的一个全纯函数. 所有 $k$ 阶节微分在 $\mathbb{C}^*$ 对 $J_kX$ 的自然作用下形成分次: $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 作用对任意 $\gamma \in J_kX$ 定义为 $\lambda \cdot j_k\gamma = j_k(t \mapsto \gamma(\lambda t))$. 在坐标中, 该作用的表达式为

$$\begin{aligned}&\lambda \cdot (z_1, \ldots, z_n, dz_1, \ldots, dz_n, \ldots, d^k z_1, \ldots, d^k z_n)\\&\quad = (z_1, \ldots, z_n, \lambda dz_1, \ldots, \lambda dz_n, \ldots, \lambda^k d^k z_1, \ldots, \lambda^k d^k z_n).\end{aligned}$$

若对任意 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 和任意 $j_k\gamma \in J_kX$ 都有 $\omega(\lambda \cdot j_k\gamma) = \lambda^m \omega(j_k\gamma)$, 则称 $k$ 阶节微分方程 $\omega$ 的次数为 $m$. 在坐标下, 这意味着 $\omega$ 在局部可写为

$$\omega = \sum_{|I_1|+2|I_2|+\cdots+k|I_k|=m} a_{I_1,\ldots,I_k}(z)(dz)^{I_1} \cdots (d^k z)^{I_k},$$

其中对每个 $1 \leqslant p \leqslant k$, 记 $I_p = (i_{p1}, \ldots, i_{pn})$, $(d^p z)^{I_p} = (d^p z_1)^{i_{p1}} \cdots (d^p z_n)^{i_{pn}}$, 且 $|I_p| = i_{p1} + \cdots + i_{pn}$.

我们于是可以自然地如下定义 $k$ 阶、次数为 $m$ 的节微分形式层. 给定开集 $U \subset X$, 定义 $\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X(U)$ 为 $U$ 上所有 $k$ 阶、次数为 $m$ 的节微分方程的集合. 这给出一个记作 $\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X$ 的局部自由层, 其对应的向量丛记作 $E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X$. 双曲几何理论的基本消没定理如下:

**定理 1** (Green-Griffiths [28], Siu-Yeung [44], Demailly [14, 18]) 设 $X$ 为光滑射影簇, $A$ 为 $X$ 上丰富线丛, $f\colon \mathbb{C} \to X$ 为全纯映射, 且 $\omega \in H^0(X, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1})$. 则

$$\omega \circ f \equiv 0.$$

因此, 该定理蕴涵如下结论: $X$ 上的所有整曲线必定满足任意沿某个在丰富除子 (diviseur ample) 消没的节微分方程. 因此, 这些节微分方程对整曲线的存在施加了更高阶的代数约束. 为准确理解这一阐释, 注意在上述坐标下, 若局部有 $f = (f_1, \ldots, f_n)$, 则

$$\omega \circ f(t) = \sum_{|I_1|+2|I_2|+\cdots+k|I_k|=m} a_{I_1,\ldots,I_k}(f(t))(f')^{I_1}(t) \cdots (f^{(k)})^{I_k}(t). \tag{1}$$

因此若 $\omega \circ f = 0$, 这恰好意味着 $f$ 满足一个 $k$ 阶微分方程. 为避免让文章太过技术, 我们在此不证明该基本消没定理; 完整证明参见 Demailly 的文章 [18]. 不过, 我们将给出两个与该定理方向一致的结果: 一是针对 Brody 曲线的版本, 二是从代数双曲性的视角给出的对应命题.

2.1.2 Brody 曲线情形的基本消没定理 Jean-Pierre Demailly 曾多次就双曲性与节微分方程作报告与授课. 本文的两位作者也有多次旁听的机会. 在这些报告和短期课程中, Demailly 给出了一个简洁的论证来证明 Brody 曲线情形的基本消没定理; 我们将在此复述该论证.

先在 $X$ 上固定一个 Hermite (埃尔米特) 度量 $h$, 并以 $\|\cdot\|_h$ 表示其在 $T_X$ 上诱导的范数. 若存在常数 $C > 0$, 使得对所有 $t \in \mathbb{C}$ 都有 $\|f'(t)\|_h \leqslant C$, 则称整曲线 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 为 Brody 曲线. 取 $k, m \in \mathbb{N}^*$, 令 $A$ 为 $X$ 上的丰富线丛, 并取 $\omega \in H^0(X, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1})$. 设 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 为一条 Brody 曲线. 我们将证明 $\omega \circ f = 0$, 即截面 $\omega \circ f \in H^0(\mathbb{C}, f^*A^{-1})$ 恒为零. 取 $A$ 上一个具有正曲率的度量 $\|\cdot\|_A$, 并记 $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ 为其在 $A^{-1}$ 上诱导的度量. 函数

$$\varphi\colon z \mapsto \|\omega \circ f(z)\|_{A^{-1}}$$

在 $\mathbb{C}$ 上是下调和 (sous-harmonique) 的, 并且在 $\omega\circ f$ 不为零的点上严格下调和. 由最大值原理, 只需证明该函数有界, 即可推出它是常数, 这是由于严格下调和性而必为零. 利用 $X$ 的紧性, 可以用有限个全纯坐标卡 (cartes) 来覆盖 $X$. 利用 $f$ 为 Brody 的事实, 可取某个实数 $r>0$, 使得对任意 $z_0\in\mathbb{C}$, 闭球 $f(\{z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|<r\})$ 都包含在上述某个坐标卡内. 于是对任意 $z_0\in\mathbb{C}$, 可选择 $X$ 上的坐标, 使得当 $|z-z_0|<r$ 时, 可写 $f(z)=(f_1(z),\dots,f_n(z))$, 从而 $\omega\circ f$ 具有 (1) 的形式. 此时只需应用 Cauchy 不等式 (例如在以 $z_0$ 为中心、半径为 $r/2$ 的圆上) 即可用一阶导数来控制 $f_i$ 的高阶导数. 而由于 $f$ 是 Brody 曲线, 其一阶导数有界, 从而推出 $\varphi$ 有界.

当然, 并非所有整曲线都是 Brody 曲线, 因此上述论证不足以证明定理 l. 不过, Brody 证明了: 一个紧复流形是双曲的, 当且仅当它不包含任何 Brody 曲线; 因此若旨在证明某流形的双曲性, 上述版本已足够.

2.1.3 代数双曲性的基本消没定理　在代数双曲性 (见定义 2) 的框架下, 定理 l 自然可改写如下:

**命题 2** (基本消没定理的代数版本)　设 $X$ 为光滑射影簇, $A$ 为 $X$ 上丰富线丛, 且 $\omega\in H^0(X,E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X\otimes A^{-1})$. 则存在 $\alpha>0$, 对于任意 Riemann 曲面 $C$ 与任意满足 $f^*\omega\neq 0$ 的全纯映射 $f\colon C\to X$, 有

$$\deg f^*A\leqslant\alpha(2g(C)-2).$$

特别地, 命题 2 对于有理曲线或椭圆曲线给出消没定理 $f^*\omega\equiv 0$. 证明基于节微分层上的一个滤过 (filtration) 的存在性. 对任意 $s,p\in\mathbb{N}$, 考虑如下定义的子层:

$$\mathscr{F}^p_s:=\mathscr{F}^p_s(\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X)(U):=\left\{\begin{array}{c}\omega\in\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X(U)\text{ 满足: 在任意局部坐标系 }V\subset U\text{ 中,}\\ \text{其限制 }\omega|_V\text{ 仅包含形如 }(dz)^{I_1}\cdots(d^kz)^{I_k}\text{ 的单项式,}\\ \text{并且满足 }|I_1|+2|I_2|+\cdots+s|I_s|\geqslant p\end{array}\right\}.$$

坐标变换的计算表明, 该定义实际上与坐标选择无关. 对固定的 $s$, 序列 $(\mathscr{F}^p_s)_p$ 在 $\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X$ 上给出一个降链滤过:

$$0=\mathscr{F}^{k+1}_s\subset\mathscr{F}^k_s\subset\cdots\subset\mathscr{F}^0_s=\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X.$$

我们研究关键情形 $s=k-1$. 记 $\mathrm{Gr}^p_{k-1}(\mathscr{F}^\bullet_{k-1})$ 为滤过 $\mathscr{F}^\bullet_{k-1}$ 的分次项, 即

$$\mathrm{Gr}^p_{k-1}(\mathscr{F}^\bullet_{k-1})=\mathscr{F}^p_{k-1}/\mathscr{F}^{p+1}_{k-1}.$$

依定义, $\mathrm{Gr}^p_{k-1}(\mathscr{F}^\bullet_{k-1})$ 由满足 $|I_1|+2|I_2|+\cdots+(k-1)|I_{k-1}|=p$ 的单项式 $(dz)^{I_1}\cdots(dz)^{I_k}$ 所生成; 等价地, $k|I_k|=m-p$. 也就是说, 分次项非零当且仅当 $k$ 整除 $m-p$; 等价地, 存在某个 $\ell$, 使得 $p=m-k\ell$.

现在, 关键的一点是在 $\mathrm{Gr}^{m-k\ell}_{k-1}(\mathscr{F}^\bullet_{k-1})$ 中, 最高阶部分 $(d^kz)^{I_k}$ 在任意坐标变换下的变换方式与 $S^\ell\Omega_X$ 的一个元素相同. 其他项的变换方式与它们在 $\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k-1,m-k\ell}\Omega_X$ 中的情形完全一致. 因此有

$$\mathrm{Gr}^{m-k\ell}_{k-1}(\mathscr{F}^\bullet_{k-1})=\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k-1,m-k\ell}\Omega_X\otimes S^\ell\Omega_X.$$

递归地, 我们可以在 $\mathscr{E}^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X$ 上构造一个滤过 $\mathscr{F}^\bullet$, 其分次项形如

$$S^{\ell_1}\Omega_X\otimes\cdots\otimes S^{\ell_k}\Omega_X,\quad \ell_1+\cdots+k\ell_k=m.$$

这已经足够证明命题 2. 事实上, 在命题的条件下, 元素 $f^*\omega$ 属于 $H^0(C,E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_C\otimes$

$f^*A^{-1})$. 此外, 由假设可知该截面非零. 因此, $H^0(C, E_{k,m}^{\mathrm{GG}}\Omega_C \otimes f^*A^{-1}) \neq 0$. 利用前述在 $C$ 上的滤过, 可以推出存在整数 $\ell_1, \dots, \ell_k \geqslant 0$ 使得 $\ell_1 + \cdots + k\ell_k = m$, 并且

$$H^0(C, K_C^{\ell_1+\cdots+\ell_k} \otimes f^*A^{-1}) = H^0(C, S^{\ell_1}\Omega_C \otimes \cdots \otimes S^{\ell_k}\Omega_C \otimes f^*A^{-1}) \neq 0.$$

特别地, 有

$$\deg(K_C^{\ell_1+\cdots+\ell_k} \otimes f^*A^{-1}) \geqslant 0.$$

因此,

$$\deg f^*A \leqslant \deg K_C^{\ell_1+\cdots+\ell_k} = (\ell_1 + \cdots + \ell_k) \deg K_C \leqslant m \deg K_C = m(2g(C) - 2).$$

这就完成了命题 2 的证明.

2.1.4 Demailly-Semple 塔 Demailly 的一个重要观察是: 在研究双曲性问题时, 我们只关心整曲线的像, 而不关心它们的参数化方式. 因此, 自然要考虑节的重新参数化作用. 为此, 考虑群

$$\mathbb{G}_k = \{\varphi\colon t \mapsto a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k;\ a_1 \in \mathbb{C}^*,\ a_j \in \mathbb{C}, \forall\, j \geqslant 2\}/(t^{k+1}),$$

它是复平面上 0 附近的双全纯映射的 $k$ 节群. 该群自然地作用在节空间 $J_kX$ 上, 定义为

$$\varphi \cdot j_k\gamma = j_k(\gamma \circ \varphi), \quad \forall\, \varphi \in \mathbb{G}_k,\ \forall\, j_k\gamma \in J_kX.$$

于是 Demailly 定义了节微分的一个不变子丛 $E_{k,m}\Omega_X \subset E_{k,m}^{\mathrm{GG}}\Omega_X$ $(k, m \in \mathbb{N}^*)$, 对应的层是

$$\mathscr{E}_{k,m}\Omega_X(U) = \{\omega \in \mathscr{E}_{k,m}^{\mathrm{GG}}\Omega_X(U) \mid \omega(\varphi \cdot j_k\gamma) = (\varphi')^m \omega(j_k\gamma),\ \forall\, \varphi \in \mathbb{G}_k,\ \forall\, j_k\gamma \in p_k^{-1}(U)\}.$$

Demailly 之所以引入这些丛, 一方面是为了在整曲线研究中考虑重参数化作用; 另一方面, 也是希望这些丛比 $E_{k,m}^{\mathrm{GG}}\Omega_X$ 具有更好的正性性质. 为了研究这些丛, Demailly 使用了 Semple 提出的节构造, 现在通常称为 Demailly-Semple 塔 (*tour de Demailly-Semple*). 其想法是把高阶导数转化成逐次求导的几何化过程. 为此, 自然引入"有向簇"的概念. 一个有向簇 (variété dirigée) 是一个偶 $(X, V)$, 其中 $X$ 是光滑复簇, 而 $V \subset T_X$ 是其全纯切丛 $T_X$ 的子向量丛. 也就是说, 对于每个点 $x \in X$, 我们取定一个在 $x$ 点的切向方向子空间 $V_x$, 并要求这些子空间随 $x$ 全纯变化. 给定一个有向簇 $(X, V)$, 我们关注与 $V$ 相切的曲线: 若 $C$ 是一个 Riemann 曲面, 且 $f\colon C \to X$ 是一个非常值的全纯映射, 则称 $f$ 与 $V$ 相切, 当且仅当对于任意点 $t \in C$ 和任意非零切向量 $\xi \in T_{C,t}$, 都有 $df_t(\xi) \in V_{f(t)}$. 最直接的例子是 $(X, T_X)$, 此时与 $T_X$ 相切的映射就是 $X$ 上的曲线本身. 按照 Demailly 的做法, 对于任意有向簇 $(X, V)$, 可以通过"求导"操作关联出一个新的有向簇. 设 $\widetilde{X} = \mathbb{P}(V)$ 为 $V$ 的射影化, 则 $\widetilde{X}$ 是一个复簇, 并带有自然的投影态射 $\pi_X\colon \widetilde{X} \to X$. 换句话说, 对于每个点 $x \in X$, 其纤维 $\pi_X^{-1}(\{x\})$ 由所有在 $x$ 点的切向方向组成. 接着定义子丛 $\widetilde{V} \subset T_{\widetilde{X}}$: 对于任意 $x \in X$ 以及由非零切向量 $\xi \in T_{X,x}$ 确定的方向 $[\xi]$, 定义

$$\widetilde{V}_{(x,[\xi])} = \{\eta \in T_{\widetilde{X},(x,[\xi])};\ d\pi_X(\eta) \in \mathbb{C} \cdot \xi\}.$$

换言之, $\widetilde{V}_{(x,[\xi])}$ 是那些在点 $(x, [\xi])$ 的切向量, 它们在 $d\pi_X$ 的作用下被映射为 $\xi$ 的标量倍. 这种构造允许我们对与 $V$ 相切的映射进行"求导": 给定一个 Riemann 曲面 $C$ 和一个与 $V$ 相切的全纯映射 $f\colon C \to X$, 定义其导映射为 $\tilde{f}\colon C \to \widetilde{X}$, 由公式 $\tilde{f}(t) = [df_t(\xi)]$ 给出, 其中 $t \in C$, $\xi \in T_{C,t}$ 是任意非零切向量. 显然这是 $f$ 的一个提升, 因为 $\pi_X \circ \tilde{f} = f$. 注意到由于 $\widetilde{X}$ 是向量丛的射影化, 它自然带有一个重言线丛 $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)$.

现在我们可以定义所谓的 Demailly-Semple 塔. 固定一个光滑复簇 $X$. 令 $(X_0, V_0) = (X, T_X)$, 然后递推定义 $(X_1, V_1) = (\widetilde{X}_0, \widetilde{V}_0)$, 依此类推, 对于任意 $k \geqslant 1$, 设

$$(X_k, V_k) = (\widetilde{X}_{k-1}, \widetilde{V}_{k-1}).$$

称 $X_k$ 为 Demailly-Semple 塔的第 $k$ 层. 对于每个 $k \geqslant 1$, 第 $k$ 层自然带有前述的重言线丛 $\mathscr{O}_{X_k}(1) = \mathscr{O}_{\widetilde{X}_{k-1}}(1)$. 注意到我们可以按递推方式将任意映射 $f\colon C \to X$ 提升为 $f_{[k]}\colon C \to X_k$. 同时存在自然的投影态射 $\pi_{k,0}\colon X_k \to X$, 由各层间的典范态射 $X_{p+1} \to X_p$ $(p \in 0, \ldots, k-1)$ 复合而得.

Demailly 所证明的一个重要结果如下:

**定理 2** (Demailly) 设 $X$ 为光滑射影簇, 且 $k, m \in \mathbb{N}^*$. 则有

$$(\pi_{k,0})_* \mathscr{O}_{X_k}(m) = E_{k,m}\Omega_X.$$

因此, 为了研究不变的节微分方程, 只需研究 $X_k$ 上的重言线丛 $\mathscr{O}_{X_k}(1)$ 即可. 在这种情形, 基本消没定理给出如下结论:

**定理 3** 设 $X$ 为光滑射影簇, $A$ 为其上的丰富线丛. 则对于任意 $k, m \in \mathbb{N}$, 任意截面 $\omega \in H^0(X_k, \mathcal{O}_{X_k}(m) \otimes \pi_{k,0}^* A^{-1})$, 以及任意整曲线 $f\colon \mathbb{C} \to X$, 其提升 $f_{[k]}$ 满足

$$f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset (\omega = 0).$$

该定理表明, 在射影簇中限制整曲线的自然方法, 是研究重言线丛 $\mathcal{O}_{X_k}(1)$ 的增广基点集 (lieu de base augmenté).

## 3. 二维和三维的 Kobayashi 猜测

现在我们将描述前一节介绍的技术在 Kobayashi 猜想 (猜想 4) 中的应用, 重点讨论维数为 2 和 3 的超曲面情形.

### 3.1 二维情形

当 $n = 1$ 时, 自然有 $d(1) = 4$; 而对于 $n \geqslant 2$, 人们预期结果应当在 $d(n) = 2n + 1$ 的情形成立. 这一猜想激发了许多关于双曲性问题的研究, 特别是 Demailly [21, 22, 13, 19, 16] 的一系列工作. 他在此方向上的主要思路是运用节微分的技术. 在文献 [22] 中, Demailly 和 El Goul 在二维情形验证了 Kobayashi 猜想:

**定理 4** 在 $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ 中的光滑一般曲面 $X$, 当其次数 $d \geqslant 21$ 时, 是 Kobayashi 意义下双曲的.

McQuillan 在 [35] 中也得到了相似的结论, 适用于 $d \geqslant 36$ 的情形; 而在 [38] 中, 这个下界进一步改进到了 $d \geqslant 18$. 我们简单解释 Demailly 和 El Goul 证明的步骤. 设 $X$ 是 $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ 中光滑一般的次数 $d \geqslant 5$ 的超曲面. 根据 Clemens (克莱门斯) [10] 的结果, 一般这样的曲面不含有有理曲线或椭圆曲线. 因此, 要验证 Kobayashi 猜想, 只需证明 Green-Griffiths 猜想在此情形成立: 任意整曲线 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 都是代数退化的, 也就是说其像不在 Zariski (扎里斯基) 拓扑下稠密.

证明的第一个关键成分是 McQuillan [36] 关于切于全纯叶状结构的整曲线的重要定理, 其表述如下.

**定理 5** (McQuillan) 设 $X$ 为一般型曲面, $f\colon \mathbb{C} \to X$ 为整曲线. 若存在一个除子 $Y \subset X_1 := \mathbb{P}(T_X)$, 使得 $f$ 的一次提升 $f_{[1]}\colon \mathbb{C} \to X_1$ 的像包含在 $Y$ 中, 则 $f$ 必为代数退化

的.

该定理的直接推论是: 若一个一般型代数曲面满足陈 (Chern) 数不等式 $c_1^2 > c_2$, 则其中的所有整曲线都是代数退化的. 实际上, Riemann-Roch (罗赫) 公式保证了存在非平凡的全局截面 $\omega \in H^0(X_1, \mathcal{O}_{X_1}(m) \otimes \pi_{1,0}^* A^{-1})$, 其中 $A$ 是 $X$ 上的一个丰富线丛且 $m \gg 0$. 基本消没定理 (定理 3) 于是给出了除子 $Y := (\omega = 0) \subset X_1$.

遗憾的是, 这个推论对 $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ 中的曲面并不适用. 事实上, 这类曲面不满足 $c_1^2 > c_2$, 并且可以验证 $\mathcal{O}_{X_1}(m) \otimes \pi_{1,0}^* A^{-1}$ 并无全局截面. 因此, 他们的想法是: 对于 $k \geqslant 2$, 在 $X$ 上构造 $\mathcal{O}_{X_k}(m) \otimes \pi_{k,0}^* A^{-1}$ 的非平凡全局截面, 其中 $A$ 为丰富线丛, $m \gg 0$. 由 Riemann-Roch 公式和 Serre (塞尔) 对偶性可推出: 当 $d \geqslant 15$ 时, $\mathcal{O}_{X_2}(m) \otimes \pi_{2,0}^* A^{-1}$ 确实存在非平凡的全局截面. 特别地, 次数 $d \geqslant 15$ 的曲面上的任意整曲线都满足一个二阶代数微分方程. 几何上来说, 若 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 是整曲线, 而 $f_{[2]}\colon \mathbb{C} \to X_2$ 是它的二次提升, 则 $f_{[2]}(\mathbb{C})$ 包含在一个超曲面 $Z \subset X_2$ 中, 即某个 $\mathcal{O}_{X_2}(m) \otimes \pi_{2,0}^* A^{-1}$ 的全局截面的零点集. 于是 $f(\mathbb{C}) \subset \pi_{2,0}(Z)$. 当 $\pi_{2,0}(Z) \subset X$ 是一条代数曲线时, 该整曲线 $f$ 显然是代数退化的, 结合 Clemens 的结果即可得到所需结论.

第二步是处理余下的两种情形: 要么 $Z$ 映射到 $X_1$ 上满, 即 $\pi_{2,1}(Z) = X_1$; 要么 $Y := \pi_{2,1}(Z) \subsetneq X_1$ 是一个仍然支配 $X$ 的曲面 (其中 $\pi_{2,1}\colon X_2 \to X_1$ 为典范投射). 在后一种情形, McQuillan 定理 (定理 5) 保证此类整曲线在 $X$ 中必为代数退化的. 在第一种情形, 当三维的 $Z$ 映射满 $X_1$ 时, Demailly 和 El Goul 的证明思路是将其归约到前一种情形. 他们证明 $\mathcal{O}_{X_2}(m) \otimes \pi_{2,0}^* A^{-1}$ 限制到 $Z$ 上仍然存在非平凡的全局截面. 若确实如此, 则这些截面的零点集定义了一个曲面 $S \subsetneq X_1$, 它包含 $f_{[1]}\colon \mathbb{C} \to X_1$ 的像, 如同前一情形一样, 再次可由 McQuillan 定理 (定理 5) 推出结论. 关于 $\mathcal{O}_{X_2}(m) \otimes \pi_{2,0}^* A^{-1}$ 在 $Z$ 上的限制具有全局截面这一事实, 是通过消没定理得到的. 这些定理的证明利用了双曲性理论中常见的技术: 即通过上同调的 Zariski 半连续性, 某个特例曲面的上同调消没可以推广到一般曲面. Demailly 和 El Goul 进一步在 Fermat (费马) 型曲面的形变 (déformations) 上进行计算, 并利用 Wronski (朗斯基) 算子. 最终他们得到: 对于次数 $\geqslant 21$ 的一般曲面, 上述限制丛确实拥有非平凡的全局截面.

**3.2 三维情形** 关于二维情形的积极结果直接启发了本文第二作者在三维情形对 Kobayashi 猜想的研究. 受双曲性问题的推动, Demailly 提出了这样一个关键问题，即如何理解在点 $x \in X$ 处阶数 $k$ 的微分算子代数的局部结构:

$$\mathscr{A}_k := \bigoplus_m (\mathscr{E}_{k,m} \Omega_X)_x.$$

更具体地说, 这个代数是否是有限生成的？它的生成元是什么？这个纯代数问题极其困难, 因为它要求确定在与恒等变换相切的幂幺群 (unipotente du groupe) $\mathbb{G}_k'$ 作用下的不变多项式代数. 经典的不变量理论适用于约化群 (groupes réductifs) 的情形, 但对幂幺群则无能为力. 三维情形在 [41] 中得到了处理, 其中证明了 $\mathscr{A}_3$ 确为有限生成, 并给出了显式生成元列表. 该代数分析进一步用于控制三维情形下三阶节丛微分的上同调, 从而证明: 在次数 $d \geqslant 97$ 的光滑超曲面中, 所有整曲线都满足某种代数微分方程 [40]. 值得注意的是, 对

节丛微分上同调的控制依赖于 Demailly 的另一项重要成果: 全纯 *Morse* (莫尔斯) 不等式 (*inégalités de Morse holomorphes*), 我们将在下一节中详细讨论.

在三维情形中还存在额外困难, 即没有 McQuillan 定理 (定理 5) 的类似结果可用. 借助一种由 Clemens, Ein, Voisin 和萧荫堂提出的补充技巧, 即在固定次数超曲面族的节空间上构造向量场, 三维情形的研究最终得出: 在 $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$ 中次数 $d \geqslant 593$ 的一般超曲面内, 所有整曲线都是代数退化的 [42]. 通过 Diverio 和 Trapani 关于 Green-Griffiths 基点集余维的观察 (在此情形 $\geqslant 2$), Kobayashi 猜想在三维情形中得到验证: 次数 $d \geqslant 593$ 的一般超曲面满足 Kobayashi 双曲性 [25].

## 4. 节微分形式的存在性

正如前一节所述, 证明给定复流形上整曲线的代数退化性的一种可能策略是: 首先在该流形上构造节微分方程, 然后研究这些节微分的几何性质, 从而推出整曲线满足的代数约束条件.

对于 $\mathbb{P}^3$ 中的曲面, 这一步是借助 Riemann-Roch 定理得到的. 然而, Riemann-Roch 定理难以推广到高维情形, 因为那需要对高阶上同调群进行精细分析. 然而, Diverio 引入了一种新的方法, 成功地在任意维数足够大次数的超曲面上证明了节微分形式的存在性.

**定理 6** (Diverio) 设 $n \in \mathbb{N}$. 则存在整数 $d_n$, 使得对任意 $d \geqslant d_n$ 以及任意次数为 $d$ 的光滑超曲面 $H \subset \mathbb{P}^n$, 存在某个 $m \in \mathbb{N}$, 满足

$$H^0(H, E_{n,m}\Omega_H \otimes \mathcal{O}_H(-1)) \neq 0.$$

该定理是论文 [24] 中的关键步骤之一. 这一结果的证明完全不依赖于 Riemann-Roch 定理, 而是使用了萧荫堂 [43] 的结果: 设 $Y$ 为维数为 $n$ 的光滑射影簇, $F, G$ 为其上的半正线丛. 若 $F^n - nF^{n-1}G > 0$, 则 $F - G$ 为大丛. 在 Diverio 的证明中, 丛 $F$ 和 $G$ 是 Demailly-Semple 塔上重言丛的组合.

该结果可视为 Demailly 全纯 Morse 不等式 的代数形式.

**定理 7** (Demailly [15, 12]) 设 $X$ 是一个复紧流形, 维数为 $n$, $L$ 是其上的全纯线丛, 带有度量 $h$, $E$ 是秩为 $r$ 的全纯向量丛. 记 $\Theta_{L,h} = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log h$ 为 $(L, h)$ 的曲率形式. 对每个 $0 \leqslant q \leqslant n$, 定义

$$X(L, h, q) = \{x \in X;\ \Theta_{L,h}(x) \text{ 的符号型为 } (n-q, q)\}.$$

则当 $m \to \infty$ 时, 有以下渐近估计:

1. 弱 Morse 不等式:
$$h^q(X, E \otimes L^m) \leqslant \frac{m^n}{n!}\, r \int_{X(L,h,q)} (-1)^q \Theta_{L,h}^n + o(m^n).$$
2. 强 Morse 不等式: $(X(L, h, \leqslant q) = \cup_{j \leqslant q} X(L, h, j).)$
$$\sum_{j=1}^{q} (-1)^{q-j} h^j(X, E \otimes L^m) \leqslant \frac{m^n}{n!}\, r \int_{X(L,h,\leqslant q)} (-1)^q \Theta_{L,h}^n + o(m^n).$$
3. 特别地, 当 $q = 1$ 时, $h^0$ 有好的下界:
$$h^0(X, E \otimes L^m) - h^1(X, E \otimes L^m) \geqslant \frac{m^n}{n!}\, r \int_{X(L,h,\leqslant 1)} \Theta_{L,h}^n + o(m^n).$$

利用该结果, Demailly [17] 证明了下列令人瞩目的结论.

**定理 8** (Demailly) 设 $X$ 是一般型的射影簇, $A$ 是其上的丰富线丛. 则当 $k, m$ 足够大时, 有

$$H^0(X, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1}) \neq 0.$$

他实际上证明了更精确的估计, 但我们这里只陈述其简化形式. 值得注意的是, Joël Merker [37] 在预印本 [17] 发布前不久, 已通过不同的方法在 $X$ 为 $\mathbb{P}^n$ 中光滑超曲面的特殊情形得到了相同的结论.

需要强调的是, Demailly 的全纯 Morse 不等式比上文提到并被 Diverio 使用的代数版本更强. 然而, Benoît Cadorel [6] 最近给出了这些全纯 Morse 不等式的完全代数化版本, 用纯代数的方法得到了类似的偏 Euler (欧拉) 特征数上界. 随后他成功地利用这些结果, 以纯代数的方式重新证明了 Demailly 关于节微分存在性的定理.

下面我们按照 Demailly 的解析方法, 给出定理 8 证明的思路概要.

出发点是考虑节空间的射影化 $X_k^{\mathrm{GG}} = (J_kX \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, 其中 $\mathbb{C}^*$ 的作用在 §2.1 中定义. 这是一个带权射影丛 (通常是奇异的) , 配备了重言层 $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(1)$, 当 $m$ 可被 $\mathrm{pgcd}(1, \ldots, k)$ 整除时, $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(m)$ 为可逆层. 因此, 可将 $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(1)$ 视为一个 $\mathbb{Q}$ 线丛. 存在投影 $\pi_k\colon X_k^{\mathrm{GG}} \to X$, 满足

$$(\pi_k)_*\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(m) = E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X.$$

因此, 构造 $E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X \otimes A^{-1}$ 的截面, 等价于构造 $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(m) \otimes \pi_k^*A^{-1}$ 的截面. 关键在于证明 $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(1)$ 是大丛. Demailly 于是在 $\mathbb{Q}$ 线丛 $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(1)$ 上构造了合适的度量, 并计算其曲率以应用全纯 Morse 不等式. 值得注意的是, 全纯 Morse 不等式同样适用于奇异情形 [3]. 这种度量是通过利用单位分解构造出的一族特定度量得到的; 这族度量在某种意义上收敛到一个在实际中可计算的表达式. 为简化这一收敛论证, 我们下面将采用 Cadorel [6] 所使用的约化方法, 将问题归结为使用与节微分丛滤过对应的分次代数, 而这一分次代数已在 §2.1 中介绍过. 这一思想早已出现在 Merker [37] 的工作中, 并在 Demailly 的论证中隐含地使用.

通过上同调长正合列 [37], 对任意 $k, m \geqslant 1$ 有

$$(h^0 - h^1)(X, E^{\mathrm{GG}}_{k,m}\Omega_X) \geqslant (h^0 - h^1)\Bigg(X, \bigoplus_{\ell_1+\cdots+k\ell_k=m} S^{\ell_1}\Omega_X \otimes \cdots \otimes S^{\ell_k}\Omega_X\Bigg). \tag{2}$$

同时利用平凡的不等式 $h^0 \geqslant h^0 - h^1$, 为了证明 $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(1)$ 是大的, 只需证明左边的项随 $m$ 的增长达到最大阶, 即按 $m^{(k+1)n-1}$ 增长 (差一个常数因子) . 因此, 只需证明右边的项也同样按 $m^{(k+1)n-1}$ 增长. 为了证明这一点, Cadorel 引入了带权射影化丛

$$\mathbb{P}_{X,k} = ((T_X^{\oplus k} = T_X \oplus \cdots \oplus T_X) \setminus \{0_X\})/\mathbb{C}^*,$$

其中 $0_X$ 是零截面, $\mathbb{C}^*$ 的作用定义为

$$\lambda \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_k) = (\lambda\xi_1, \ldots, \lambda^k\xi_k), \quad \forall x \in X,\ \xi_1, \ldots, \xi_k \in T_{X,x},\ \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

带权射影簇 $\mathbb{P}_{X,k}$ 是一个奇异的带权射影空间丛, 具有一个典范投影 $\rho_k\colon \mathbb{P}_{X,k} \to X$, 并配备了一个重言丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{X,k}}(1)$. 与 $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(1)$ 相同, 它也可以看作一个 $\mathbb{Q}$ 线丛. 此外, 该丛满

足: 对于任意 $m \in \mathbb{N}$, 有

$$(\pi_X)_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{X,k}}(m) = \bigoplus_{\ell_1+\cdots+k\ell_k=m} S^{\ell_1}\Omega_X \otimes \cdots \otimes S^{\ell_k}\Omega_X.$$

因此, 按照 Demailly 的想法, 问题化归为对 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{X,k}}(1)$ 应用全纯 Morse 不等式. 我们在切丛 $T_X$ 上取一个 Hermite 度量 $h$, 在直和丛 $T_X^{\oplus k}$ 上定义

$$\Phi_h(\xi) = \left(\sum_{s=1}^k \|\xi_s\|_h^{2p/s}\right)^{1/p}, \quad p = \mathrm{pgcd}(1,\ldots,k),\ \forall\, \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_k) \in T_X^{\oplus k}.$$

该函数满足齐次性条件

$$\Phi_h(\lambda\cdot\xi) = |\lambda|^2 \Phi_h, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \forall\, \xi \in T_X^{\oplus k}.$$

它由此在 $\mathbb{Q}$ 线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X}(-1)$ 上诱导出一个度量 $\Psi_h$, 并通过对偶性在 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{X,k}}(1)$ 上诱导出一个度量 $\Psi_h^*$, 其曲率形式记作 $\Theta = \Theta_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X}(1),\Psi_h^*}$. 为计算此曲率, 可以通过投影映射 $\pi\colon T_X^{\oplus k}\setminus\{0_X\} \to \mathbb{P}_{X,k}$ 把计算拉回到总空间 $T_X^{\oplus k}\setminus\{0_X\}$, 其中 $0_X$ 表示零截面的像. 于是有

$$\pi^*\Theta = dd^c \log \Phi_h.$$

为计算这一式, 先固定 $X$ 上一点 $x_0$, 取以 $x_0$ 为中心的局部坐标 $(z_1,\ldots,z_n)$, 并取 $T_X$ 的一个特定的基 $(e_1(z),\ldots,e_n(z))$, 使得度量 $h$ 具有以下展开形式:

$$h(e_\alpha(z), e_\beta(z)) = \delta_{\alpha,\beta} + \sum_{1\leqslant i,j,\alpha,\beta\leqslant n} c_{ij\alpha\beta} z_i \bar{z}_j + O(|z|^3),$$

其中 $c_{ij\alpha\beta}$ 是在 $x_0$ 处度量 $(T_X, h)$ 的曲率系数, 即

$$\Theta_{T_X,h}(x_0) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{1\leqslant i,j,\alpha,\beta\leqslant n} c_{ij\alpha\beta}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j \otimes e_\alpha^* \otimes e_\beta.$$

通过 Taylor 展开, 在这些坐标下有

$$\log \Phi_h(z,\xi) = \frac{1}{p}\log\sum_{s=1}^k |\xi_s|^{2p/s} + \sum_{s=1}^k \frac{1}{s}\frac{|\xi_s|^{2p/s}}{\sum_{t=1}^k |\xi_t|^{2p/t}} \sum_{1\leqslant i,j,\alpha,\beta\leqslant n} c_{ij\alpha\beta} z_i \bar{z}_j \frac{\xi_{s\alpha}\bar{\xi}_{s\beta}}{|\xi_s|^2} + O(|z|^3),$$

其中 $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_k)$, 并且对每个 $1 \leqslant s \leqslant k$, 有 $\xi_s = \xi_{s1}e_1 + \cdots + \xi_{sn}e_n$, 以及 $|\xi_s|^2 = \sum_{\alpha=1}^n |\xi_{s\alpha}|^2$. 对上述展开式应用 $dd^c$ 运算, 并在 $z=0$ 处取值, 可得曲率公式

$$\Theta(x_0,[\xi]) = \omega(\xi) + \gamma(\xi),$$

其中

$$\gamma(\xi) = \frac{i}{2\pi}\sum_{s=1}^k \frac{1}{s}\frac{|\xi_s|^{2p/s}}{\sum_{t=1}^k |\xi_t|^{2p/t}} \sum_{1\leqslant i,j,\alpha,\beta\leqslant n} c_{ij\alpha\beta}(z)\frac{\xi_{s\alpha}\bar{\xi}_{s\beta}}{|\xi_s|^2} dz_i \wedge d\bar{z}_j,$$

而 $\omega$ 是带权射影空间 $\mathbb{P}_{1^{[n]},\ldots,k^{[n]}}$ 上的 Fubini-Study (富比尼–施图迪) 度量.

接下来要应用全纯 Morse 不等式, 以得到 $h^0$ 的下界, 也就是说要估计积分

$$\int_{\mathbb{P}_X(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(1)},\Psi,\leqslant 1)} \Theta^{n+kn-1}.$$

我们观察到 $\omega$ 含有所有的 $d\xi_i$ 而不含 $dz_i$, 而 $\gamma$ 恰好相反, 因此有

$$\Theta^{n+nk-1} = \omega^{nk-1}\gamma^n.$$

由于 Fubini-Study 形式 $\omega$ 是正的, $\Theta$ 的符号型完全由 $\gamma$ 决定. 因此我们要计算的积分为

$$I_k = \int_{\mathbb{P}_X(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(1)},\Psi,\leqslant 1)} \Theta^{n+kn-1} = \int_{X\times\mathbb{P}_{1^{[n]},\ldots,k^{[n]}}} \mathbb{1}_\gamma \omega^{nk-1}\gamma^n,$$

其中 $\mathbb{1}_\gamma$ 是指标函数, 表示 $\gamma$ 具有符号型 $(n-1,1)$ 的点集. 接下来引入极坐标: 对每个 $s$, 设 $x_s = |\xi_s|^{2p/s}$, $u_s = \xi_s/|\xi_s|$. 由于 $\mathbb{P}_{1^{[n]},\ldots,k^{[n]}}$ 是伪球面 $\sum_{s=1}^k |\xi_s|^{2p/s} = 1$ 的商空间, 因此可以假设 $\sum_{s=1}^k x_s = 1$. 经过直接但繁琐的计算, 可以得到

$$I_k = \int_{z\in X}\int_{(x,u)\in\Delta_{k-1}\times(S^{2n-1})^k} \mathbb{1}_g(z,x,u)\, g(z,x,u)^n d\nu(x)d\mu(u),$$

其中

$$g(z,x,u) = \frac{i}{2\pi}\sum_{s=1}^k \frac{x_s}{s}\sum_{1\leqslant i,j,\alpha,\beta} c_{ij\alpha\beta}(z)\, u_{s\alpha}\overline{u}_{s\beta} dz_i\wedge d\overline{z}_j,$$

$\mathbb{1}_g$ 是指示函数, 表示 $g$ 具有符号型 $(n-1,1)$ 的点集; $d\nu$ 是单纯形 $\Delta_{k-1} = \{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}_+^k;\ x_1+\cdots+x_k=1\}$ 上的概率测度, 而 $d\mu$ 是 $(S^{2n-1})^k$ 上不变测度的乘积.

Demailly 发现形式 $g$ 可以看作曲率张量的 Monte-Carlo 估计, 因此他计算了函数 $z\mapsto g(z,\cdot,\cdot)$ 的期望. 利用 $\int_{\Delta_{k-1}} x_s d\nu(x) = 1/k$ (这是由 $d\nu$ 的显式形式直接算出的), 以及球面上二次型积分公式 $\int_{S^{2n-1}} Qd\mu = \frac{1}{n}\operatorname{tr}(Q)$, 可得期望

$$\mathbb{E}(g(z,\cdot,\cdot)) = \frac{1}{kr}\sum_{s=1}^k \frac{1}{s}\frac{i}{2\pi}\sum_{1\leqslant i,j,\alpha\leqslant n} c_{ij\alpha\alpha}(z)\, dz_i\wedge d\overline{z}_j = \frac{1}{kr}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\Theta_{K_X,\det h^*}.$$

这时奇迹出现了: 我们重新得到了带有由 $h$ 诱导度量的典范丛的曲率形式 $\eta = \Theta_{K_X,\det h^*}$, 因此可以期待将 Morse 积分直接与典范丛的正性联系起来. Demailly 通过对方差的细致分析使这一关系严格化, 并得到

$$I_k = \frac{(\log k)^n}{n!\,(k!)^n}\int_X \mathbb{1}_\eta \eta^n + O((\log k)^{n-1}).$$

最后只需比较 $I_k$ 与典范丛 $K_X$ 的体积. 若 $K_X$ 是丰富的, 可取其正曲率度量 $h_{K_X}$, 再取 $T_X$ 上的一个光滑度量 $h$, 使得在 $K_X$ 上诱导的度量为 $\det h^{-1} = h_{K_X}$, 于是 $\eta$ 就是 $(K_X, h_{K_X})$ 的第一陈形式, 它由假设为正, 因此,

$$\int_X \mathbb{1}_\eta \eta^n = \operatorname{Vol}(K_X) > 0.$$

特别地, 当 $k$ 足够大时, 有 $I_k > 0$. 由全纯 Morse 不等式可得

$$h^0(\mathbb{P}_{X,k}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{X,k}}(m)) - h^1(\mathbb{P}_{X,k}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{X,k}}(m)) \geqslant \frac{m^{n+kn-1}}{(n+kn-1)!} I_k + o(m^{n+kn-1}),$$

这不仅表明 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{X,k}}(1)$ 是大的, 并且结合不等式 (2), 还进一步推出 $\mathcal{O}_{X_k^{\mathrm{GG}}}(1)$ 本身也是大的. 这就完成了 Demailly 非消没定理在 $K_X$ 丰富情形下的证明.

若 $K_X$ 不是丰富而只是大的, 情形会稍微复杂一些, 因为此时需要使用奇异度量, 我们在此略去这些技术细节.

## 5. 近期进展

前几节的内容已经充分展示了 Demailly 在复双曲性研究领域中的重要地位. 他的工作直接推动了本领域若干重要进展, 我们现在详细介绍其中的一些近期成果.

**5.1 Kobayashi 猜想** 对任意维数证明 Kobayashi 猜想的第一步, 是在 $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ 的一般超曲面上确立 Green-Griffiths-Lang 猜想.

**定理 9** (Diverio-Merker-Rousseau, [24]) 设 $X \subset \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ 是次数 $d \geqslant 2^{n^5}$ 的一般超曲面, 则存在一个真代数子簇 $Y \subsetneq X$, 使得任意整曲线 $f\colon \mathbb{C} \to X$ 的像 $f(\mathbb{C})$ 都包含在 $Y$ 中.

Riedl 和 Yang 最近的结果 [39] 给出了一个令人惊讶的结论: 在上述背景下, Green-Griffiths-Lang 猜想蕴涵 Kobayashi 猜想.

**定理 10** (Riedl-Yang, [39]) 对于 $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ 中的一般超曲面, Green-Griffiths-Lang 猜想和 Kobayashi 猜想中的次数下界 $d_{GG}(n)$ 和 $d_K(n)$ 满足关系

$$d_K(n) = d_{GG}(2n-2).$$

更具体地说, 若对于 $2n-2$ 维、次数不小于 $d_{GG}(2n-2)$ 的一般超曲面, 其 Green-Griffiths 集 (由节微分的基点集定义) 具有至少 1 的余维, 那么 $n$ 维、次数 $\geqslant d_{GG}(2n-2)$ 的一般超曲面是 Kobayashi 双曲的.

证明的主要技术成分是关于 Grassmann (格拉斯曼) 流形的如下观察: 若在 $\mathbb{P}^n$ 中有一族 $m$ 维平面, 则包含至少其中一个平面的 $(m+1)$ 维平面族在 Grassmann 流形中的余维会严格减小. 考虑 $\mathscr{Y}_{n,d} \subset \mathscr{X}_{n,d}$, 它是 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 $d$ 的超曲面族的节微分基点集在通用族中的投影. 由此可得: 若 $\mathscr{Y}_{r-1,d} \subset \mathscr{X}_{r-1,d}$ 的余维为 1, 则 $\mathscr{Y}_{r-c,d} \subset \mathscr{X}_{r-c,d}$ 的余维至少为 $c$.

值得指出的是, Kobayashi 猜想的第一个证明, 是本文第一作者在 [5] 中沿着一条完全不同的思路得到的, 随后 Demailly [16] 对其进行了简化. 基本思路是利用与线丛截面相关的 Wronski 算子. 若 $L \to X$ 是一个线丛, 且 $s_0, \ldots, s_k$ 为 $L$ 的截面, 则可定义 Wronski 算子

$$W_k(s_0, \ldots, s_k) \in H^0(X, E_{k,l}\Omega_X \otimes L^{k+1}),$$

其中 $l = k(k+1)/2$. 给定一个维数 $\dim \Sigma \geqslant k+1$ 的线性系统 $\Sigma \subset H^0(X, L)$, 这些 Wronski 算子诱导出一个到 Grassmann 流形的有理映射 $\Phi\colon X_k \dashrightarrow \mathrm{Gr}_{k+1}(\Sigma)$, 并且在 $X_k \setminus B_k$ (其中 $B_k$ 是 $\Phi$ 的不定点集) 上存在同构

$$\mathcal{O}_{X_k}(l) \otimes \pi_{k,0}^* L^{k+1} \simeq \Phi^* \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1).$$

这里的 $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}}(1)$ 表示 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}_{k+1}(\Sigma)$ 上的 Plücker (普吕克) 线丛, 即通过 Plücker 映射 $\mathrm{Gr}_{k+1}(\Sigma) \to \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\Sigma)$ 从 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^{k+1}\Sigma)}(1)$ 拉回得到的重言丛.

我们回顾基本消没定理适用于空间 $H^0(X, E_{k,l}\Omega_X \otimes A^{-1})$, 其中 $A > 0$ 为丰富线丛. 然而, Wronski 算子的构造依赖于 $L$ 的截面存在性, 因此要求 $L$ 的正性, 这与消没定理要求的负性条件相矛盾. 因此, 关键想法是构造一个情形, 使得 Wronski 算子可被某个截面 $\sigma \in H^0(X, A)$ (其零点除子足够正) 整除, 然后考虑

$$\sigma^{-1} W_k(s_0, \ldots, s_k) \in H^0(X, E_{k,l}\Omega_X \otimes L^{k+1} \otimes A^{-1}).$$

若 $L^{k+1} \otimes A^{-1} < 0$, 则可应用消没定理. 于是, 证明就归结为构造一些超曲面 $X$ 的例子, 使得 (在适当修改节空间 $X_k$ 后) 我们有如下丰富线丛:

$$\mathcal{O}_{X_k}(l) \otimes \pi_{k,0}^*(L^{k+1} \otimes A^{-1}),$$

其中 $L^{k+1} \otimes A^{-1} < 0$. 此类超曲面的双曲性便由基本消没定理推出. 由于丰富性在 Zariski 拓扑下是开条件, 因此同次数的一般超曲面也继承了该双曲性. 值得注意的是, 为了使这一证明成立, 需要通过爆破 (blow-up) 某个理想层来修改 Demailly 的节塔紧化. 在此特定情形, 这在本质上等价于在"曲状 Hilbert (希尔伯特) 概形"上工作. 紧化方式的选择在这些问题中极为关键, 因为它会影响重言线丛的正性性质, 从而直接关系到可行性. 值得一提的是, Demailly 早在 [20] 中就已使用过在 Demailly-Semple 塔上爆破某些理想层的思想, 并借此获得了与 Green-Griffiths 猜想有关的若干结果.

在次数有效性方面, 利用 Wronski 方法, 邓亚在 [23] 中证明可取

$$d_K(n) = (n+1)^{2n+5}(n+2),$$

而 Demailly 证明当 $n \geqslant 4$ 时, 可取

$$d_K(n) = \lfloor (n+4)(en)^{2n+1}/(2\pi) \rfloor.$$

Bérczi 和 Kirwan 在 [1] 中取得了朝预期线性界迈进的重要进展, 他们为 Kobayashi 猜想给出了一个多项式上界

$$d_K(n) = 16(2n-1)^3(10n-1).$$

他们采用的策略与前述相同, 即构造在足够丰富的除子上消没的节微分, 从而获得代数退化性 [24], 进而导出双曲性 [39]. 不同之处在于, 他们利用非约化不变理论在节空间上构造了一种新的紧化

$$\pi\colon \mathscr{X}_k \to X.$$

与 $X_k$ 的紧化类似, 该空间配备有重言线丛 $\mathcal{O}_{\mathscr{X}_k}(1)$. 我们注意到 $\pi_*\mathcal{O}_{\mathscr{X}_k}(m)$ 是某个不变节微分层 $E_{k,m'}$ 的子层. 结果表明, $\mathcal{O}_{\mathscr{X}_k}(1)$ 相比于 $X_k$ 上的 $\mathcal{O}_{X_k}(1)$ 具有更好的正性性质. 特别地, 它在相对意义下是丰富的, 这极大改善了可以构造节微分的超曲面次数的下界.

**5.2 代数双曲性** 一个基本问题是, 能否以代数方式刻画 Kobayashi 意义下的双曲性 —— 这一性质本质上是解析性的. 在这一方向上, Demailly 引入了"代数双曲性"(参见定义 2) .

根据 Kobayashi 猜想 (猜想 4) 和 Demailly 猜想 (猜想 1), 人们预期: 当 $n \geqslant 2$ 时, 次数 $d \geqslant 2n+1$ 的 $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ 中一般超曲面是代数双曲的. 这一问题吸引了大量研究. 例如, Voisin [46, 45] 推广了 Clemens [10] 和 Ein [26] 的结果, 她证明当 $n \geqslant 3$ 时,

$$\deg C \cdot (d-2n) \leqslant 2g(C) - 2,$$

因此, 当 $n \geqslant 3$ 且 $d \geqslant 2n+1$ 时, $\mathbb{P}_{n+1}$ 中的一般超曲面是代数双曲的, 这恰与 Kobayashi 猜想中预期的界一致. 最近, Coskun 和 Riedl 证明了一般次数为 5 的曲面是代数双曲的 [11], 从而以最优次数界完成了 Kobayashi 猜想的代数版本的证明.

针对猜想 1, Javanpeykar 和 Kamenova [29] 证明, 代数双曲簇也满足 Kobayashi 双曲簇的若干经典性质, 例如其自同构群是有限的.

**5.3 轨形 (orbifolde) 双曲性** Green-Griffiths-Lang 猜想为一般型射影簇的双曲性性质提供了一个整体的描述性框架. Campana [7] 将这一框架推广到任意射影簇 (更一般地,

紧 Kähler (凯勒) 簇) , 并引入了与一般型簇“对偶”的概念 —— 所谓的特殊簇 (variétés spéciales) :

**定义 3** 称一个射影簇 $X$ 为特殊的, 若对任意 $p>0$, 以及任意秩为 1 的凝聚子层 $L\subset\Omega_X^p$, 都有 $\kappa(X,L)<p$.

在此定义中, $\kappa(X,L)$ 是 $L$ 的 Iitaka (饭高茂) 维数 (参见 [33, 第 2 章]) . Campana 由此提出了如下猜想:

**猜想 5** 一个射影簇 $X$ 是特殊的, 当且仅当存在一条 Zariski 稠密的整曲线 $f\colon\mathbb{C}\to X$.

Campana 证明了任意射影簇都存在一个称为“核心映射”(coeur) 的纤维化 $C_X\colon X\to C(X)$ (在双有理意义下定义), 其一般纤维是特殊簇, 而底空间是轨形意义下的一般型簇 (即考虑纤维重数的情形) . 若将 Green-Griffiths-Lang 和 Campana 的猜想结合起来, 就能得到对任意射影簇双曲性性质的统一描述. 在这一方向上, 最近的进展来自将节微分技术引入 Camapna 轨形框架之中 [8]. 令人惊讶的是 (与紧情形或对数情形不同), 存在一些轨形意义下的一般型偶 $(X,D)$, 其上竟不存在任何节微分. Demailly 最近的一项工作 [9] 正是研究这一现象, 并在轨形情形下推广了节微分存在性定理.

## 参考文献


[ 1 ] G. Bérczi et F. Kirwan. Non-reductive geometric invariant theory and hyperbolicity. Invent. Math. 235, n° 1 (2024), 81–127. DOI: 10.1007/s00222-023-01219-z.

[ 2 ] A. Bloch. Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité. Mémorial Sci. Math. Acad. Sci. Paris, Fasc. 20 (1926).

[ 3 ] L. Bonavero. Singular holomorphic Morse inequalities. J. Geom. Anal. 8, n° 3 (1998), 409–425. DOI: 10.1007/BF02921793.

[ 4 ] R. Brody. Compact manifolds and hyperbolicity. Trans. Amer. Math. Soc. 235 (1978), 213–219.

[ 5 ] D. Brotbek. On the hyperbolicity of general hypersurfaces. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 126 (2017), 1–34.

[ 6 ] B. Cadorel. Generalized algebraic Morse inequalities and jet differentials. arXiv preprint arXiv:1912.03952.

[ 7 ] F. Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54, n° 3 (2004), 499–630.

[ 8 ] F. Campana, L. Darondeau et E. Rousseau. Orbifold hyperbolicity. Compos. Math. 156, n° 8 (2020), 1664–1698.

[ 9 ] F. Campana, L. Darondeau, J.-P. Demailly et E. Rousseau. On the existence of logarithmic and orbifold jet differentials. Annales Henri Lebesgue 7 (2024), 1–67.

[10] H. Clemens. Curves on generic hypersurfaces. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19, n° 4 (1986), 629–636.

[11] I. Coskun et E. Riedl. Algebraic hyperbolicity of the very general quintic surface in $\mathbb{P}^3$. Adv. Math. 350 (2019), 1314–1323.

[12] J.-P. Demailly. Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la $d$-cohomologie. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 301 (1989), 119–122.

[13] J.-P. Demailly. Complex Analytic and Differential Geometry. 2012.

[14] J.-P. Demailly. On the Ohsawa-Takegoshi-Manivel $L^2$ extension theorem. In: Proceedings of the conference in honour of the 85th birthday of Pierre Lelong, Paris, September 1997. Vol. 188. Progress in Mathematics. 2000, pp. 47–82.

[Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials, Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. 62.2 (AMS Summer Institute on Algebraic Geometry, Santa Cruz, July 1995), eds. J. Kollár, R. Lazarsfeld, (1997), 285–360. —— 校者补]

[15] J.-P. Demailly. Une preuve simple de la conjecture de Grauert-Riemenschneider. Séminaire P. Lelong-P. Dolbeault-H.Skoda (Analyse) 1985-86 1295 (1986), 24–47.

[16] J.-P. Demailly. A simple proof of the Kobayashi conjecture on the hyperbolicity of general algebraic hypersurfaces. In: Hyperbolicity properties of algebraic varieties. Vol. 56. Panor. Synthèses. Soc. Math. France, Paris, [2021]©2021, pp. 89–134.

[17] J.-P. Demailly. Holomorphic Morse inequalities and the Green-Griffiths-Lang conjecture. Pure Appl. Math. Q. 7, n° 4, Special Issue: In memory of Eckart Viehweg (2011), 1165–1207.

[18] J.-P. Demailly. Hyperbolic projective varieties and algebraic differential equations. In: Journée en l'honneur de Henri Cartan. Paris: Société Mathématique de France, 1997, 3–17.

[19] J.-P. Demailly. Recent results on the Kobayashi and Green-Griffiths-Lang conjectures. Jpn. J. Math. 15, n° 1 (2020), 1–120.

[20] J.-P. Demailly. Towards the Green-Griffiths-Lang conjecture. In: Analysis and geometry. Vol. 127. Springer Proc. Math. Stat. Springer, Cham, 2015, pp. 141–159.

[21] J.-P. Demailly et J. El Goul. Connexions méromorphes projectives partielles et variétés algébriques hyperboliques. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324, n° 12 (1997), 1385–1390.

[22] J.-P. Demailly et J. El Goul. Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space. Amer. J. Math. 122, n° 3 (2000), 515–546.

[23] Y. Deng. On the Diverio-Trapani conjecture. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 53, n° 3 (2020), 787–814. DOI: 10.24033/asens.2434.

[24] S. Diverio, J. Merker et E. Rousseau. Effective algebraic degeneracy. Invent. Math. 180, n° 1 (2010), 161–223.

[25] S. Diverio et S. Trapani. A remark on the codimension of the Green-Griffiths locus of generic projective hypersurfaces of high degree. J. Reine Angew. Math. 649 (2010), 55–61.

[26] L. Ein. Subvarieties of generic complete intersections. Invent. Math. 94, n° 1 (1988), 163–169.

[27] G. Faltings. Complements to Mordell. In: Rational points (Bonn, 1983/1984). Vol. E6. Aspects Math. Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1984, pp. 203–227.

[28] M. Green et P. Griffiths. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In: The Chern Symposium 1979 (Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif., 1979). Springer, New York-Berlin, 1980, pp. 41–74.

[29] A. Javanpeykar et L. Kamenova. Demailly's notion of algebraic hyperbolicity: geometricity, boundedness, moduli of maps. Math. Z. 296, n° 3-4 (2020), 1645–1672.

[30] S. Kobayashi. Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. 2. Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York, 1970, p. ix+148.

[31] S. Kobayashi. Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. Second. An introduction. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005, p. xii+148.

[32] S. Lang. Introduction to complex hyperbolic spaces. Springer-Verlag, New York, 1987, p. viii+271.

[33] R. Lazarsfeld. Positivity in algebraic geometry. I. Classical setting: line bundles and linear series. 48. Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge. Berlin: Springer, 2004.

[34] R. Lazarsfeld. Positivity in algebraic geometry. II. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals. 49 Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge. Berlin: Springer, 2004.

[35] M. McQuillan. Holomorphic curves on hyperplane sections of 3-folds. Geom. Funct. Anal. 9, n° 2 (1999), 370–392.
[36] M. McQuillan. Diophantine approximations and foliations. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., n° 87 (1998), 121–174.
[37] J. Merker. Algebraic differential equations for entire holomorphic curves in projective hypersurfaces of general type: optimal lower degree bound. In: Geometry and analysis on manifolds. In memory of Professor Shoshichi Kobayashi. Cham: Birkhäuser/Springer, 2015, pp. 41–142. DOI: 10.1007/978-3-319-11523-8_4.
[38] M. Păun. Vector fields on the total space of hypersurfaces in the projective space and hyperbolicity. Math. Ann. 340, n° 4 (2008), 875–892.
[39] E. Riedl et D. Yang. Applications of a Grassmannian technique to hyperbolicity, Chow equivalency, and Seshadri constants. J. Algebraic Geom. 31, n° 1 (2022), 1–12.
[40] E. Rousseau. Équations différentielles sur les hypersurfaces de $\mathbb{P}^4$. J. Math. Pures Appl. (9) 86, n° 4 (2006), 322–341.
[41] E. Rousseau. Étude des jets de Demailly-Semple en dimension 3. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56, n° 2 (2006), 397–421.
[42] E. Rousseau. Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in $\mathbb{P}^4$. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 16, n° 2 (2007), 369–383.
[43] Y. Siu. An effective Matsusaka big theorem. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), 1387–1405.
[44] Y.-T. Siu et S.-k. Yeung. Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane. Invent. Math. 124, n° 1-3 (1996), 573–618. DOI: 10.1007/s002220050064.
[45] C. Voisin. A correction: "On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces" [J. Differential Geom. 44 (1996), no. 1, 200–213; MR1420353 (97j:14047)]. J. Differential Geom. 49, n° 3 (1998), 601–611.
[46] C. Voisin. On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces. J. Differential Geom. 44, n° 1 (1996), 200–213.
[47] P. Vojta. Diophantine approximations and value distribution theory. 1239. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1987, p. x+132.

(邓亚 译 曹俊彦 校)